Topologie Algébrique TD 5

18 Novembre 2011

5 Revêtements

Exercice 5.1 (Calcul de π_1 et revêtements) Si on connaît le revêtement universel d'un espace topologique, le calcul du groupe fondamental de cet espace se ramène au calcul du groupe des automorphismes de son revêtement universel.

1. Formuler un énoncé précis pour cette idée, et le démontrer.
2. **(Espace projectif réel)** Rappelons que le *plan projectif réel* peut être défini comme le quotient d'une sphère de dimension 2 par la relation d'équivalence antipodale. Vérifier que le morphisme quotient est un revêtement. En déduire le groupe des automorphisme de ce revêtement et ainsi le groupe fondamental d'un plan projectif réel. Faire la même chose pour un espace projectif réel de dimension quelconque.
3. **(Tore)** Un *tore* est par définition un espace topologique homéomorphe au produit d'un nombre fini de cercle. Quel est le revêtement universel d'un tore ? Calculer le groupe fondamental d'un tore en déterminant le groupe des automorphismes de son revêtement universel.
4. Déterminer le groupe d'isométries de $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ engendré par les isométries $z \mapsto z + i$ et $z \mapsto \overline{z} + 1$.

Indications:

1. Soit X un espace topologique, et $p : \widetilde{X} \to X$ son revêtement universel, alors $\mathrm{Aut}(p) \simeq \pi_1(X)$. Rappelons que le groupe des automorphismes d'un revêtement *galoisien* (par exemple, revêtement universel) est le groupe quotient du groupe fondamental de la base par le sous-groupe distingué correspondant au revêtement (*i.e.* l'image du groupe fondamental du revêtement par le morphismes induit par la projection).

2. En fait, on a le théorème général qui assure que le quotient d'un espace topologique par une action libre et proprement discontinue d'un groupe est toujours un revêtement. La sphère de dimension $n \geq 2$ est bien simplement connexe. Donc le groupe des automorphismes (et ainsi le groupe fondamental d'un espace projectif réel de dimension au moins 2) est un groupe d'ordre 2, *i.e.* $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. L'espace projectif réel de dimension 1 est homéomorphe à un cercle.

3. On note le tore $T \simeq \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{r}$. Son revêtement universel est $\mathbf{R}^r$ et le groupe des automorphismes consiste des translations entières, donc il est

isomorphe à $\mathbf{Z}^r$. On remarque que ce résultat est une conséquence immédiate du fait que π_1 est multiplicatif.

4. Rappelons que la bouteille de Klein est le quotient du plan $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ par la relation d'équivalence engendrée par $z \sim z+i$ et $z \sim \bar{z}+1$. Il est facile de vérifier que le morphisme quotient est un revêtement. Le groupe des symétries qu'on veut étudier est exactement le groupe des automorphismes de ce revêtement, ainsi le groupe fondamental d'une bouteille de Klein, qui est, par la méthode standard (présentation de polygone), $\langle a, b | a^2 b^2 = 1 \rangle$

Exercice 5.2

1. Classifier les revêtements connexes d'un cercle $\mathbb{S}^1$;
2. Classifier les revêtements connexe de deux feuilles d'un bouquet de deux cercles $\mathbb{S}^1 \bigvee \mathbb{S}^1$. En générale montrer qu'un revêtement connexe de deux feuilles est toujours galoisien.
3. Classifier les revêtements connexe de trois feuilles de l'espace $\mathbb{S}^1 \bigvee \mathbb{S}^1$. Lesquels sont galoisiens ?
4. Construire le revêtement universel de $\mathbb{S}^1 \bigvee \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1 \bigvee \mathbb{S}^1 \bigvee \mathbb{S}^2$.

Indications:

1. Les revêtements connexes sont classifiés par les sous-groupes de $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbf{Z}$. Le sous-groupe $\{0\}$ correspond au revêtement universel $\mathbf{R}$, et pour tout entier positif n, le sous-groupe $n\mathbf{Z}$ correspond à $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $z \mapsto z^n$.

2. 3. Étudier l'action de monodromie sur la fibre au-dessus du point nodal.

4. Voir Hatcher *Algebraic Topology* Page 59 ou Page 77.

Exercice 5.3 (Revêtement de graphe et Théorie de groupe) Un *graphe* est par définition un CW-complexe de dimension 1. On pourrait résoudre les problèmes de la théorie de groupes en utilisant la théorie de revêtements. On note F_r un groupe libre de r générateurs.

1. Montrer qu'un revêtement d'un graphe est encore un graphe.
2. Montrer qu'un sous-groupe d'un groupe libre est encore un groupe libre. Et dans le cas d'engendrement fini : soient H un sous-groupe d'indice $d \in \mathbf{N}^+$ de F_n, montrer que H est un groupe libre de $dn-d+1$ générateurs.
3. Soient $m \geq 2$ un entier. Montrer que F_m peut être réalisé comme un sous-groupe de F_2.
4. Soit F_2 un groupe libre de deux générateurs. Classifier ses sous-groupes d'indice 2, et préciser un système de génératrice pour chacun.
5. Résoudre le même problème pour les sous-groupe d'indice 3 de F_2.
6. Montrer qu'un sous-groupe non-trivial distingué d'indice infinie dans un groupe libre ne peut pas être engendré par un nombre fini de générateurs.

Indications:

1. c.f. Hatcher *Algebraic Topology* Page 85.

2. Le premier énoncé se découle de 1. Et pour le calcul dans le cas d'engendrement fini : d'abord, on voit F_n comme le groupe fondamental du bouquet de n cercles, noté X. Par la correspondance galoisienne, H correspond à un revêtement $Y \to X$ à d feuilles. Par 1, on sait que Y est aussi un graphe connexe. De plus, en utilisant la propriété de revêtement, on déduit que Y a d sommets, nd arrêtes. Par le calcul général du groupe fondamental d'un graphe (voir la dernière feuille TD 4), $H \simeq \pi_1(Y)$ est un groupe libre de $(nd-d+1)$ générateurs.

3. On prend $n = 2$ et $d = m - 1$. Il suffit de trouver un sous-groupe de F_2 d'indice $d = m - 1$, mais c'est très facile, par exemple, on peut le prendre comme le noyau d'un morphisme surjectif de F_2 vers $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$.

4. 5. Par la correspondance galoisienne, on obtient les résultats par l'exercice précédent.

6. Soit H un groupe distingué d'indice infinie du groupe libre $G = F_S$, où F_S est le groupe libre d'un ensemble de génératrice S. Par 2, on sait que H est aussi un groupe libre. Si on suppose par l'absurde que H est d'engendrement fini, on peut supposer que $H = F_n$, où n est un entier strictement positif. On voit G comme le groupe fondamental de $X = \bigvee_{s\in S} \mathbb{S}^1$, et H comme le groupe fondamental d'un revêtement galoisien $p : Y \to X$. On note x le point base de X, $M := p^{-1}(x)$ la fibre au-dessus de x. Choisir n générateurs de H, chacun fait intervenir un sous-ensemble fini de M, on appelle N l'union de ces sous-ensembles. Comme M est un ensemble infini, il existe un élément $m \in M - N$ (donc il ne intervient pas dans les expressions des n générateurs choisis). Puisque $p : Y \to X$ est galoisien, il existe un automorphisme de ce revêtement qui transport un générateur en un lacet γ passant par m. Après la rétraction d'un arbre maximal du sous-graphe l'union des générateurs, on voit que γ est un nouveau élément qui ne peut pas engendré par les générateurs choisis, une contradiction.

Exercice 5.4

1. Montrer que tout revêtement d'un H-espace est galoisien.
2. Donner un exemple d'un espace topologique à groupe fondamental non-abélien, tel que tout revêtement connexe est galoisien.

Indications:

1. On rappelle que le groupe fondamental d'un H-espace est toujours abélien (voir la dernière feuille TD 4), donc tout sous-groupe est distingué, *i.e.* tout revêtement est galoisien.

2. Il suffit de trouver un groupe non-commutatif dont tous les sous-groupes sont distingués. Par-exemple, le groupe d'ordre 8 $H = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$.

Exercice 5.5 (Reconstruction) Soit (X, x) un espace topologique pointé, qui est connexe par arc et semi-localement simplement connexe. On considère la catégorie $\mathfrak{Cov}/X$ des revêtements connexes par arc de X. On a le foncteur de fibre :

$$\begin{array}{ccc} F : \mathfrak{Cov}/X & \to & \mathfrak{Set} \\ (Y \xrightarrow{p} X) & \mapsto & p^{-1}(x) \\ \begin{tikzcd} Y_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_1"'] & Y_2 \arrow[d, "p_2"] \\ X \arrow[r, equal] & X \end{tikzcd} & \mapsto & p_1^{-1}(x) \to p_2^{-1}(x) \end{array}$$

Montrer que le groupe des automorphismes du foncteur F est exactement le groupe fondamental de X :

$$\mathrm{Aut}(F) \simeq \pi_1(X, x).$$

On a reconstruit le groupe fondamental à partir de la catégorie des revêtements munie d'un foncteur fibre.

Indications:
On rappelle qu'il y a une équivalence de catégories entre la catégorie $\mathfrak{Cov}/X$ des revêtements *connexes* de X, et la catégorie $\pi_1(X, x) - \mathfrak{Set}$ des ensembles munis d'une action *transitive* de $\pi_1(X, x)$. Cette équivalence est donnée par dans un sens, on associe à un revêtement sa fibre au-dessus de x munie de l'action de monodromie, ainsi un $\pi_1(X, x)$-ensemble, et dans l'autre sens, on fait le revêtement associé à un $\pi_1(X, x)$-ensemble en faisant le produit avec le revêtement universel et puis quotient par la relation d'équivalence (voir le cours.).

Grâce à cette équivalence de catégorie, il suffit de démontrer le lemme suivant :

Lemme Soit G un groupe. Alors le groupe des automorphismes du foncteur oubli $G - \mathfrak{Set} \to \mathfrak{Set}$ est canoniquement isomorphe à G.

Pour démontrer ce lemme, il suffit de regarder l'action d'un automorphisme sur le G-ensemble spécial G, plus les compatibilités.

On remarque que cette interprétation de groupe fondamental permet de définir le 'groupe fondamental' pour des objets de nature algébrique (par exemples, variétés algébriques) dont la catégorie des 'revêtements' sont bien définie. Par exemple, si on voit les extensions finies séparables comme les revêtement d'un corps le 'groupe fondamental' d'un corps est son groupe de Galois absolut.

Exercice 5.6 (Structures supplémentaires sur revêtements) Si on a un revêtement $\pi : Y \to X$. On peut transporter très souvent une structure supplémentaire de nature locale sur la base X en une structure correspondante sur le revêtement Y. De plus, la structure induite sur Y est unique, caractérisée par la condition que π préserve les structures supplémentaires. Essayer de préciser la structure induite sur Y dans les cas suivants :

1. X est une variété différentielle ;
2. X est une variété complexe ;
3. X est une variété symplectique ;
4. X est une variété riemannienne ;
5. X est un groupe de Lie, voir l'exercice 5.8.

Indications:

1. D'une manière conceptuelle, une structure différentielle (de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur une variété topologique est déterminée par le faisceau structurel $\mathscr{C}_X^\infty$ des fonctions locales (de classe $\mathscr{C}^\infty$). Si on se donne une structure différentielle sur X, *i.e.* un faisceau $\mathscr{C}_X^\infty$, on définit le faisceau structurel de Y par

$$\mathscr{C}_Y^\infty := \pi^{-1}(\mathscr{C}_X^\infty).$$

Plus concrètement, pour chaque point de $y \in Y$, on choisit un voisinage étale de $\pi(y)$ par rapport au revêtement, et puis on transport les cartes de X contenues dans ce voisinage en cartes de Y dans l'image réciproque de ce voisinage, finalement, on prend l'atlas maximal de Y compatible à toutes les cartes ainsi construites.

2. On peut faire la même construction comme 1 en remplaçant le mot 'différentiel' par 'holomorphe'. On a une autre approche plus directe : la structure presque complexe sur Y est définie par $J_Y := \pi^*(J_X)$, où J_X est la structure complexe de X. J_Y est bien intégrable, parce que le tenseur de Nirenberg de J_Y est exactement le transporté du tenseur de Nirenberg de J_X par l'homéomorphisme local.

3. En remplaçant les cartes différentielles par les cartes symplectiques, la construction concrète de 1 marche pour cette question. L'approche directe analogue de 2 marche aussi : le pull-back de la forme symplectique est bien encore une forme symplectique.

4. Toujours deux approches : on peut définir la structure riemannienne par les cartes locales, ou bien on peut simplement pull back le tenseur de métrique, qui reste de type (2,0), symétrique, positif.

Exercice 5.7 (Holomorphie de relèvements) C'est la suite de l'exercice précédent, on verra que le relèvement souvent respecte la structure supplémentaire de nature locale.

1. Soit X une variété complexe, et $\pi : Y \to X$ est un revêtement. On munit Y de la structure complexe induite (*cf.* l'exercice précédent). Soit $\widetilde{f} : Z \to Y$ une application continue d'une troisième variété complexe Z vers Y, montrer que $\widetilde{f}$ est holomorphe si et seulement si $f := \widetilde{f} \circ \pi$ est holomorphe.
2. Énoncer et montrer les assertions analogues en remplaçant 'complexe' par 'différentielle', 'symplectique', ou 'riemannienne/isométrie locale'.
3. Est-elle correcte l'assertion analogue pour les groupes de Lie ? Sinon, donner des contre-exemples.
4. Soit f une fonction holomorphe définie sur un domaine simplement-connexe $\mathbf{\Omega}$. Supposons que 0 n'est pas dans l'image de f, montrer qu'il existe une fonction $g = \log(f)$ holomorphe bien définie sur $\mathbf{\Omega}$ telle que

$$\exp(g) = f,$$

elle est unique si on fixe son valeur en un point.
5. Sous les même hypothèses, construire $\sqrt[k]{f}$ pour $k \in \mathbf{N}^+$.

Indications:

1. et 2. sont triviaux.

3. Non. C'est très facile à construire des contre-exemples par des groupes discrets. Mais c'est un défaut de nature discrète : si on se restreint dans le cas où X, Y, Z sont des groupe de Lie connexes, et $\widetilde{f}$ envoie le point neutre de Z vers celle de Y, alors l'énoncé reste vrai, on peut le démontrer par l'unicité de relèvement.

4. On considère le revêtement $\exp : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$, comme $\mathbf{\Omega}$ est simplement connexe, le morphisme f se relève en un morphisme $g : \mathbf{\Omega} \to \mathbf{C}$, qui est holomorphe.

5. On peut faire le raisonnement comme 4, ou on prend simplement

$$\sqrt[k]{f} = \exp(\frac{1}{k}\log(f)).$$

Exercice 5.8 (Revêtement de groupes de Lie) Soit G un groupe de Lie connexe avec l'élément neutre e_G. Si on se donne un revêtement connexe $\pi : R \to G$, et on fixe un point $e_R \in \pi^{-1}(e_G)$. On va démontrer qu'il existe une unique structure de groupe de Lie sur R telle que e_R est l'élément neutre de R et que π est un morphisme de groupes de Lie.

1. Rappeler la structure différentielle induite sur R.
2. Soient $\mu_G : G \times G \to G$ et $\iota_G : G \to G$ la loi de multiplication et l'inversion. Pour deux lacets en e_G $\gamma_i : I \to G$, $i = 1, 2$, on note $\gamma_1 * \gamma_2$ le lacet défini par $t \mapsto \mu(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, $t \in I$, et note $\gamma_1 \bullet \gamma_2$ le lacet de concaténation. Montrer que $\gamma_1 \bullet \gamma_2$, $\gamma_2 \bullet \gamma_1$, $\gamma_1 * \gamma_2$, $\gamma_2 * \gamma_1$ sont homotopes relative aux extrémités.

3. Pour un lacet $\gamma : I \to G$ en e_G, on note $\overline{\gamma}$ le lacet défini par $t \mapsto \iota(\gamma(t))$, $t \in I$; et note $\widetilde{\gamma}$ le lacet inverse. Montrer que $\overline{\gamma}$ et $\widetilde{\gamma}$ sont homotopes relative aux extrémités.
4. Déterminer l'image du morphisme sur les groupes fondamentaux induits par l'application composée suivante :

$$R \times R \xrightarrow{\pi\times\pi} G \times G \xrightarrow{\mu_G} G.$$

5. En déduire une application $R \times R \to R$ envoyant (e_R, e_R) vers e_R, on l'appelle μ_R. Vérifier que μ_R est $\mathscr{C}^\infty$.
6. Construire une application $\mathscr{C}^\infty$ $\iota_R : R \to R$ par la même procédure.
7. Vérifier que (R, μ_R, ι_R) est bien un groupe de Lie de l'élément neutre e_R, et π est un morphisme de groupe de Lie .
8. Démontrer l'unicité de la structure de groupe de Lie sur R.
9. Déterminer le groupe des automorphismes de ce revêtement.

Indications:

1. La structure différentielle a été construite dans l'exercice précédent.

2 et 3. Voir l'exercice 8 de TD 4 (sur les H-espaces).

4. $(\pi \times \pi)_*$ est injectif d'image $\pi_1(R) \times \pi_1(R)$. D'après 3, $(\mu_G)_*$ est la multiplication du groupe fondamental. Donc l'image est $\pi_1(R)$.

5. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} R \times R \arrow[r, dashed, "\mu_R"] \arrow[d, "\pi\times\pi"'] \arrow[dr] & R \arrow[d, "\pi"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu_G"'] & G \end{tikzcd}$$

L'existence de la flèche pointée est assurée par le théorème de relèvement de morphisme et le résultat de 4 que l'image du morphisme sur les groupes fondamentaux induit par la flèche diagonale est exactement $\pi_1(R)$. Pour le fait que μ_R est $\mathscr{C}^\infty$, voir l'exercice précédent.

6. Par 2, on sait que l'image de la composition

$$\pi_1(R) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(G) \xrightarrow{\iota_{G*}} \pi_1(G)$$

est encore $\pi_1(R)$. On en déduit l'inversion de R.

7. Il faut vérifier les commutativités de plusieurs diagrammes dans la définition d'une structure de groupe de Lie. Mais toutes commutativités sont une

conséquences immédiates de l'unicité de relèvement de morphisme.

8. Il se découle de l'unicité des relèvement de morphismes.

9. C'est le noyau de π, *i.e.* la fibre au-dessus de e_G.

Exercice 5.9 (SO(3) **et** SU(2)) On va voir un exemple explicite de l'exercice précédent. Rappelons que

$$\mathrm{SO}(3) = \{M \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{R}) | M^t M = I, \det(M) = 1\},$$

$$\mathrm{SU}(2) = \{M \in \mathrm{Mat}_2(\mathbf{C}) | \overline{M}^t M = I, \det(M) = 1\}.$$

1. Montrer que le groupe de Lie SO(3) est homéomorphe à la boule fermée de dimension 3 modulo la relation d'équivalence $x \sim -x$ pour tout point x du bord $\mathbb{S}^2$ de la boule.
2. Montrer que le groupe fondamental de SO(3) est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Essayer de donner un générateur.
3. **(Généralités sur les quaternions)** Soit $\mathbb{H}$ la partie de $M_2(\mathbf{C})$ formée des matrices de la forme $q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbf{C}$. On note

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

   Enfin, si $q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$, on note $\overline{q} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $|q| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$. Montrer les propriétés suivantes :
   - $\mathbb{H}$ est une sous-algèbre réelle de $M_2(\mathbf{C})$ de base réelle $1, I, J, K$.
   - $\mathbb{H}$ est l'algèbre réelle définie par les relations suivantes : $I^2 = J^2 = K^2 = -1$, $IJ = K$, $JK = I$, $KI = J$.
   - Pour tout $q \in \mathbb{H}$ on a $q\overline{q} = |q|^2$. En déduire que $\mathbb{H}$ est un corps non-commutatif.
   - L'application $q \mapsto |q|$ est une norme sur $\mathbb{H}$. La sphère unité de $\mathbb{H}$ est un sous-groupe de $\mathbb{H}^*$ qui s'identifie à SU(2) et aussi la sphère unité $\mathbb{S}^3$.
   - $\mathbf{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{H}$ et c'est son centre.
4. (a) Soit $Q : \mathbf{R}^3 \to \mathbb{H}$ l'application définie par $Q(x, y, z) = xI + yJ + zK$. On appelle son image l'ensemble des quaternions purs. Soit $q \in \mathbb{H}^*$ et u un quaternion pur. Montrer que quq^{-1} est un quaternion pur.

   Définissons $\phi_q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ par $\phi_q(y) = Q^{-1}(qQ(y)q^{-1})$.

   (b) Montrer que pour $\lambda \in \mathbf{R}^*$ on a $\phi_{\lambda q} = \phi_q$ et que $\phi_q \in \mathrm{SO}(3)$. En déduire une applications

$$p : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$$

   Montrer que c'est un morphisme de groupe et un revêtement double. En déduire que $\mathbb{S}^3 \cong \mathrm{SU}(2)$ est un revêtement universel de SO(3).

Indications:

1. C'est la coordonnée d'Euler : par la géométrie classique, tout élément de SO(3) est une rotation (par rapport à un axe), donc on peut lui associer un point sur cet axe dont la distance à l'origine signifie l'angle de la rotation, la seule ambiguïté est qu'il faut identifier la rotation d'angle π et $-\pi$.

2. D'après 1, $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) \simeq \pi_1(\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \cup \mathbb{D}^3) = \pi_1(\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, parce que la 3-cellule ne contribue pas au groupe fondamental. Soit $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{S}^3$ le chemin donné par $\gamma(t) = \cos(t) + i\sin(t)$. La composée $r = p \circ \gamma$ est un lacet de $\mathbb{S}0(3)$ qui n'est pas homotope à un lacet constant. La composée de lacets $r * r$ est homotope au lacet constant de SO(3).

3. et 4. sont faciles.